

TD 29-30 : Applications linéaires

Dans ce TD, on note E, F et G trois $\mathbb{K}$ -e.v.

Applications linéaires

1 ★★ Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - 2y, 0)$
- 2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, y + 1)$
- 3) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (xy, yx)$
- 4) $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $f(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 5) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d$
- 6) $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 4f$
- 7) $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = 2ff'$
- 8) $f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ définie par $f(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(X)$

Dans la suite, on considère $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^2$ comme des $\mathbb{C}$ -e.v. :

- 9) $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z_1, z_2) = z_1 - z_2$
- 10) $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z_1, z_2) = z_1 - \overline{z_2}$

2 ★★ Soit

$$(e_1, e_2, e_3) = ((1, 4, 1), (-2, 3, 3), (0, 2, 1))$$

- 1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $(x, y, z) \in \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ sans utiliser d'argument de dimension.
- 2) En déduire que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 3) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire qui vérifie :

$$f(e_1) = (6, 4, -4)$$

$$f(e_2) = (4, 4, -8)$$

$$f(e_3) = (3, 1, -3)$$

Justifier l'existence et l'unicité de l'application f .
(nécessite un résultat de la section 2 du cours)

- 4) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En utilisant la question 1), déterminer $f(x, y, z)$.

Noyau et image

3 ★ On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 3x - 5y + z)$$

- 1) Déterminer $\text{Ker } f$, ainsi qu'une base et sa dimension.
- 2) Faire de même pour $\text{Im } f$.
- 3) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

4 ★ On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y) = (x, x + y, x + 2y)$$

- 1) Déterminer $\text{Ker } f$, ainsi qu'une base et sa dimension.
- 2) Faire de même pour $\text{Im } f$.
- 3) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

5 ★★ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- 1) Montrer que :

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g$$

- 2) Montrer que :

$$\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f) \quad \text{et} \quad \text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$$

- 3) En déduire que si $g \circ f$ est un isomorphisme, alors f est injective et g est surjective.

6 ★★★ On considère l'application $f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ définie par $f(P) = P(X + 1) - P(X)$.

- 1) Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\deg P_k = k$. Montrer que la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$.
- 2) Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$, en utilisant la question précédente pour $\text{Im } f$.
- 3) Dédurre des questions précédentes que f est un endomorphisme surjectif mais pas injectif. En quoi ce n'est pas une contradiction ?

7 ★★ On définit $\varphi : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par

$$\varphi(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Montrer que φ est linéaire et déterminer $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$. Est-ce que φ est injective ? surjective ?

8 ★★ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les assertions suivantes :

$$\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \quad \text{et} \quad \text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$$

$$\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \iff \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$$

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f + \text{Im } f = E$$

Dimension finie et rang

9 ★ On suppose que $\dim E > \dim F$. Soit $f : E \rightarrow F$. Montrer que f n'est pas injective.

10 ★★ Soit $f : E \rightarrow E$ tel que $f \circ f$ est l'application nulle.

- 1) Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.
- 2) En déduire que $\text{rg } f \leq \frac{1}{2} \dim E$.

11 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par

$$f(P) = P - P' - P''$$

- 1) Montrer que f est bijective.
- 2) Dans cette question on suppose $n \geq 2$. Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$. En déduire les polynômes $Q_0, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $f(Q_0) = 1$, $f(Q_1) = X$ et $f(Q_2) = X^2$.

12 ★★ On pose $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $f_1, f_2, f_3, f_4 \in E$ les fonctions définies par :

$$f_1(t) = \sin t \quad f_2(t) = \cos t \quad f_3(t) = t \sin t \quad f_4(t) = t \cos t$$

Enfin on définit $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

- 1) Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F . En déduire la dimension de F .
- 2) On considère l'application $D : F \rightarrow F$ définie par $D(f) = f'$. Montrer que D est bien définie et que c'est un endomorphisme de F .

3) Déterminer $\text{Ker } D$.

4) En déduire que D est bijective.

13 ★★ Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ de degrés respectifs $n, m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P \wedge Q = 1$. On veut montrer qu'il existe un unique couple $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ vérifiant :

$$PU + QV = 1 \quad \deg U \leq m - 1 \quad \deg V \leq n - 1$$

- 1) Justifier brièvement l'existence du couple (U, V) sans les contraintes sur les degrés de U et de V . Dans la suite, on définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_{m-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] &\rightarrow \mathbb{R}_{m+n-1}[X] \\ (U, V) &\mapsto PU + QV \end{aligned}$$

- 2) Justifier que φ est bien définie et linéaire.
- 3) Montrer que φ est injective.
- 4) En déduire que φ est bijective. Conclure.

14 ★★★ Soit E un e.v. de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Montrer que $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$. En déduire que $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v$
- 2) Trouver $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tels que l'inégalité ci-dessus soit stricte.
- 3) Trouver $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tels que l'inégalité ci-dessus soit une égalité.

15 ★★★ On suppose E de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\text{Ker } u \subset \text{Ker } v \iff \exists w \in \mathcal{L}(E) \quad v = w \circ u$$

Projecteurs, symétries, etc.

16 ★ Déterminer si les applications linéaires suivantes sont des projecteurs ou des symétries, et déterminer leurs éléments caractéristiques :

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x, -2x - y)$
- 2) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x + y - z, x + y - z)$$

3) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - z, 2y, -x + z)$$

4) $f_A : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = R$, où R est le reste de la division euclidienne de P par $A \in \mathbb{R}[X]$ fixé.

17 ★ Déterminer l'expression :

- 1) Du projecteur $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ sur $F = \text{Vect}((0, 1))$ parallèlement à $G = \text{Vect}((1, 1))$.
- 2) De la symétrie $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ par rapport à F et parallèlement à G (définis ci-dessus).
- 3) De la symétrie $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ par rapport à $F = \text{Vect}((1, 2, 3))$ et parallèlement à $G = \text{Vect}((1, 0, 0), (1, 1, 0))$.
- 4) Du projecteur $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ sur G et parallèlement à F (définis ci-dessus).

18 ★★ Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ et $q = \text{id}_E - p$.

- 1) Montrer que p est un projecteur si et seulement si q est un projecteur.
- 2) On suppose que p est un projecteur. Montrer que $\text{Im } p = \text{Ker } q$ et que $\text{Ker } p = \text{Im } q$.

19 ★★ Soit p, q deux projecteurs de E . Montrer que

$$\text{Ker } p = \text{Ker } q \iff (p \circ q = p \quad \text{et} \quad q \circ p = q)$$

$$\text{Im } p = \text{Im } q \iff (p \circ q = q \quad \text{et} \quad q \circ p = p)$$

Formes linéaires

20 ★★ On pose $E := \mathbb{R}^2$ et $f, g \in E^*$ les applications

$$f(x, y) = x + y \quad g(x, y) = x - y$$

- 1) Montrer que (f, g) forme une base de E^* .
- 2) Déterminer les coordonnées de $p : (x, y) \mapsto x$ et de $q : (x, y) \mapsto y$ selon la base (f, g) .
- 3) Trouver une base (u, v) de E telle que (f, g) soit la base duale de (u, v) .

21 ★★ Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $f \in E^*$. Montrer que f est surjective ou identiquement nulle.

22 ★★ On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on pose $\varphi_k : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_k(P) = P(k)$.

- 1) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\varphi_k \in E^*$.
- 2) Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* .
- 3) En déduire qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\int_0^n P(t) dt = \lambda_0 P(0) + \lambda_1 P(1) + \dots + \lambda_n P(n)$$

Remarque : on peut montrer le même résultat si on remplace l'intégrale ci-dessus par $\int_a^b P(t) dt$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Cependant, les réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ dépendront de a, b .